VIGAS RECTANGULARES DOBLEMENTE ARMADAS.

El acero de compresión a veces es necesario por:

1. Las dimensiones de la sección son restringidas por consideraciones arquitectónicas. En este caso, el concreto en compresión no es capaz de resistir el momento actuante por lo tanto, se añade acero en esta zona.

2. Existe una tendencia a no usar dicho refuerzo a raíz del uso del Método de Diseño por Resistencia en donde la capacidad total de compresión del concreto es tomada en cuenta.

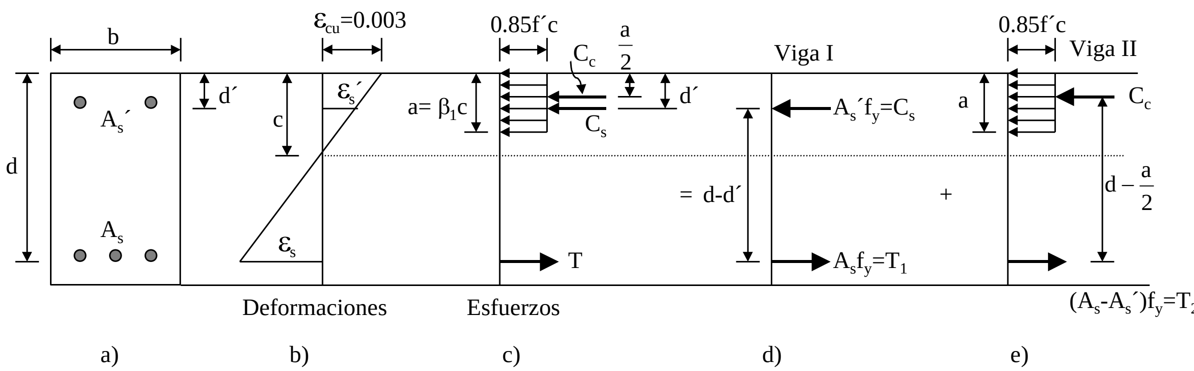
3. Se ha observado que el acero de compresión contribuye a reducir las Deformaciones a Largo Plazo.

4. En algunas ocasiones, el acero de compresión se añade para sujetar el refuerzo de cortante (Estribos), algunas veces este refuerzo se ignora para fines de cálculo.

Las ecuaciones para determinar M_n son más complicadas que las usadas para una sección rectangular simplemente armadas, sobre todo si el acero de compresión no fluye. Debido a lo anterior, *el procedimiento por tanteos es más simple para determinar* M_n.

Para la demostración de las ecuaciones de vigas doblemente armadas, se discutirán dos casos:

a) Ambos aceros fluyen. $\varepsilon_s' \geq \varepsilon_y$, $\varepsilon_s \geq \varepsilon_y$ → $f_s' = f_s = f_y$.



$$\text{Para este caso :}\begin{cases} \varepsilon_s' \geq \varepsilon_y \Rightarrow f_s' = f_y \\ \varepsilon_s \geq \varepsilon_y \Rightarrow f_s = f_y \end{cases}$$

El momento total M_n, se determina a partir del análisis de las vigas I y II, es decir:

$$M_n = M_I + M_{II} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

Donde:

$$M_I = T_1(d - d') = A_s' f_y (d - d') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$M_{II} = T_2\left(d - \frac{a}{2}\right) = (A_s - A_s')f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

Con (2) y (3) en (1):

$$M_n = A_s' f_y (d - d') + (A_s - A_s')f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

De la figura se puede obtener: **a**, de la condición de equilibrio:

$$C_c = T_2 \Rightarrow 0.85 f´cba = (A_s - A_s')f_y \Rightarrow a = \frac{(A_s - A_s')f_y}{0.85 f´cb} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(5)$$

Con la definición de:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \text{ y } \rho' = \frac{A_s'}{bd} \rightarrow a = \frac{(\rho - \rho')f_y d}{0.85 f´c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(6)$$

b) Acero de compresión no fluye, es decir $\varepsilon_s' < \varepsilon_y \rightarrow f_s' < f_y$ por Δ_s, de la figura b).

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{c} = \frac{\varepsilon_s'}{c-d'} \Rightarrow \varepsilon_s' = \frac{c-d'}{c}\varepsilon_{cu} = \frac{c-d'}{c}(0.003) \Rightarrow \varepsilon_s' = 0.003\left(\frac{c}{c} - \frac{d'}{c}\right)$$

$$a = \beta_1 c \Rightarrow c = \frac{a}{\beta_1} \qquad \varepsilon_s' = 0.003\left(1 - \frac{d'}{a}\beta_1\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(7)$$

Ahora, se tiene de las figuras d) y e) que:

$$\left.\begin{aligned} C_s &= E_s \varepsilon_s' A_s' = 0.003 E_s\left(1 - \frac{d'}{a}\beta_1\right)A_s' \\ C_c &= 0.85 f´cba \\ T &= A_s f_y \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(8)$$

Del equilibrio:

$$C_c + C_s = T$$

$$A_s f_y = 0.85 f´cba + 0.003 E_s\left(1 - \frac{d'}{a}\beta_1\right)A_s' \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9)$$

$$A_s f_y = 0.85 f´c\beta_1 bc + A_s'\varepsilon_{cu}E_s\left(\frac{c-d'}{c}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(10)$$

Nota: Las ecuaciones (9) y (10) son cuadráticas en **a** ó **c**, respectivamente.

Se resuelve la ecuación (9) y se obtiene M_n.

$$M_n = C_c(d - 0.50a) + C_s(d - d') \qquad \Sigma M_T = 0$$

$$(0.85 f´cb)a^2 + (0.003 E_s A_s' - A_s f_y)a - (0.003 E_s A_s' \beta_1 d') = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(9')$$

Nota: Se debe tener cuidado en este tipo de vigas, ya que para recubrimientos grandes,ε_s**'** puede ser de tensión, en estos casos, la contribución del **A_s'** a la resistencia es mínimo.

Limitaciones del refuerzo según ACI.

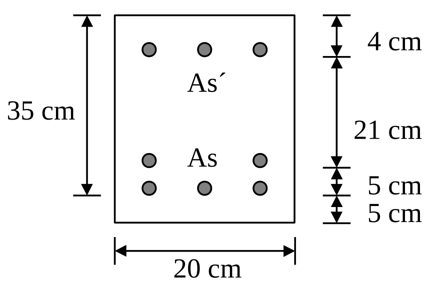
$\bar{\rho}_{máx} = 0.75\rho_b + \rho'$ Cuando el Acero de Compresión Fluye.

$\bar{\rho}_{máx} = 0.75\rho_b + \rho' \dfrac{f_s'}{f_y}$ Cuando $f_s<f_y$.

$$a = \frac{-\left(6000A_s' - A_s f_y\right) + \sqrt{\left(6000A_s' - A_s f_y\right)^2 + 4\left(0.85f´cb\right)\left(0.003E_s A_s'\beta_1 d'\right)}}{2\left(0.85f´cb\right)}$$

EJEMPLO 1

Determinar M_n para la siguiente sección, así como los esfuerzos en los lechos de acero.



$f´c=300$ kg/cm^2.
$f_y=4200$ kg/cm^2.

$A_s'=3\#6=3\#19=(3)\ (2.84)=8.52$ cm^2.
$A_s=5\#8=5\#25=(5)\ (5.10)=25.50$ cm^2.

$$\beta_1 = 1.05 - \frac{300}{4200} = 0.8357 \Rightarrow \beta_1 = 0.836$$

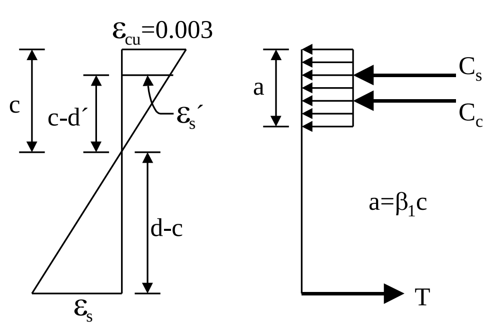
Primero hay que determinar **d**.

d'=4 cm.

$$d = \frac{d_1A_1 + d_2A_2}{A_1 + A_2} = \frac{\left(25\times2\times5.10\right) + \left(30\times3\times5.10\right)}{\left(2\times5.10\right) + \left(3\times5.10\right)} \Rightarrow d = 28\,cm.$$

1er. Tanteo:

c=12 cm.



$$a = \beta_1 c = (0.836)(12) = 10.032\ cm$$

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{c} = \frac{\varepsilon_s'}{c-d'} \Rightarrow \varepsilon_s' = \frac{c-d'}{c}\varepsilon_{cu} = \frac{12-4}{12}(0.003) = 0.002 < \varepsilon_y = \frac{4200}{2\times10^6} = 0.0021$$

$$f_s' = E_s\varepsilon_s' = (2\times10^6)(0.002) = 4000\ kg/cm^2.$$

$$C_s = A_s' f_s' = (8.52)(4000) = 34080\ kg$$

$$C_c = 0.85 f'c b\beta_1 c = (0.85)(300)(20)(0.836)(12) = 51163\ kg$$

$$\Sigma C = C_s + C_c = 34080 + 51163 = 85243\ kg$$

$$\frac{\varepsilon_s}{d-c} = \frac{\varepsilon_{cu}}{c} \Rightarrow \varepsilon_s = \frac{d-c}{c}\varepsilon_{cu} = \frac{28-12}{12}(0.003) = 0.004 > 0.0021 \Rightarrow f_s = f_y$$

$$T = A_s f_y = (25.50)(4200) = 107100\ kg > C = 85243\ kg \Rightarrow \text{Aumentar c.}$$

2do. Tanteo.

Nota: En secciones Doblemente Armadas, la fuerza total de compresión **NO** es directamente proporcional a la profundidad del Eje Neutro por lo que esta, no puede obtenerse a partir de una proporcionalidad después del primer tanteo, como es el caso de secciones Simplemente Armadas.

$$c = 15\ cm \Rightarrow a = \beta_1 c = (0.836)(15) \Rightarrow a = 12.54\ cm.$$

$$\varepsilon_s' = \frac{15-4}{4}(0.003) = 0.0022 > \varepsilon_y = 0.0021 \Rightarrow f_s' = f_y$$

$$C_s = A_s' f_y = (8.52)(4200) = 35784\ kg.$$

$$C_c = 0.85 f'c b a = (0.85)(300)(20)(12.54) = 63954\ kg.$$

$$\Sigma C = 99738\ kg.$$

$$\varepsilon_s = \frac{28-15}{15}(0.003) = 0.0026 > \varepsilon_y = 0.0021 \Rightarrow f_s = f_y$$

$$T = A_s f_y = (25.50)(4200) = 107100 > \Sigma C \Rightarrow \text{Aumentar c.}$$

3er. Tanteo.

$c = 16.50\ cm \rightarrow a = 13.794\ cm.$

$$\varepsilon_s' = \frac{16.50-4}{16.50}(0.003) = 0.00227 > \varepsilon_y = 0.0021 \Rightarrow f_s' = f_y$$

$$\left.\begin{array}{l} C_s = (8.54)(4200) = 35784\ kg \\ C_c = (0.85)(300)(20)(13.794) = 70349\ kg \end{array}\right\} \Sigma C = 106133\ kg.$$

$$\varepsilon_s = \frac{28-16.50}{16.50}(0.003) = 0.00209 \approx \varepsilon_y = 0.0021 \Rightarrow f_s = (2\times10^6)(0.00209) = 4181\ kg/cm^2$$

$T = A_s f_y = (25.50)(4181) = 106636\ kg \approx C = 106133\ kg.........ok.$

Cálculo de M_n.

$$M_n = C_c\left(d - \frac{a}{2}\right) + C_s(d-d') = (70349)\left(28 - \frac{13.794}{2}\right) + (35784)(28-4)$$

$$M_n = 2343390.95\ kg-cm \Rightarrow M_n = 23.434\ t-m.$$

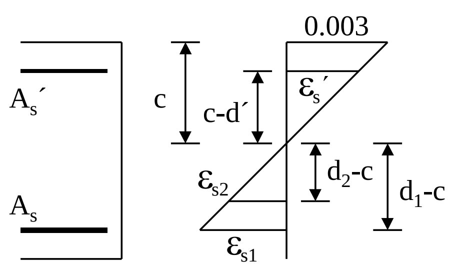
Solución con ecuaciones:

Asumiendo que ambos aceros fluyen:

$$a = \frac{(A_s - A_s')f_y}{0.85 f´cb} = \frac{(25.50-8.52)(4200)}{(0.85)(300)(20)} \Rightarrow a = 13.983\ cm.$$

$$a = \beta_1 c \Rightarrow c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{13.983}{0.836} \Rightarrow c = 16.73\ cm.$$

Deformaciones:



$$\frac{\varepsilon_{cu}}{c} = \frac{\varepsilon_s'}{c-d'} \Rightarrow \varepsilon_s' = \frac{c-d'}{c}\varepsilon_{cu} = \frac{16.73-4}{16.73}(0.003)$$
$$\varepsilon_s' = 0.00228 > \varepsilon_y = 0.0021 \Rightarrow f_s' = f_y$$

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{d_1 - c} = \frac{\varepsilon_{cu}}{c} \Rightarrow \varepsilon_{s1} = \frac{d_1 - c}{c}\varepsilon_{cu} = \frac{30 - 16.73}{16.73}(0.003)$$

$$\varepsilon_{s1} = 0.00237 > \varepsilon_y = 0.0021 \Rightarrow f_{s1} = f_y$$

$$\frac{\varepsilon_{s2}}{d_2 - c} = \frac{\varepsilon_{cu}}{c} \Rightarrow \varepsilon_{s2} = \frac{d_2 - c}{c}\varepsilon_{cu} = \frac{25 - 16.73}{16.73}(0.003)$$

$$\varepsilon_{s2} = 0.001483 < \varepsilon_y = 0.0021 \Rightarrow f_{s2} < f_y$$

$$f_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} = (2 \times 10^6)(0.001483)$$

$$f_{s2} = 2966 \ kg / cm^2.$$

$$C_c = 0.85 f´cba = (0.85)(300)(20)(13.983) = 71298 \ kg.$$

$$C_s = A_s' f_y = (8.52)(4200) = 35784 \ kg.$$

$$\Sigma C = C_c + C_s = 71298 + 3574 = 107082 \ kg.$$

$$T_1 = A_{s1} f_{s1} = (5.10)(3)(4200) = 64260 \ kg.$$

$$T_2 = A_{s2} f_{s2} = (5.10)(2)(2966) = 30253 \ kg.$$

$$\Sigma T = T_1 + T_2 = 64260 + 30253 = 94513 \ kg.$$

TAREA 2b.

1. Una viga de concreto rectangular mide 12 in. de ancho y tiene un peralte efectivo de 18 in.. El acero de compresión consiste en dos varillas #8 localizadas 2.50 in. a partir de la cara superior. Si f´c=4000 psi. y f_y=60000 psi..

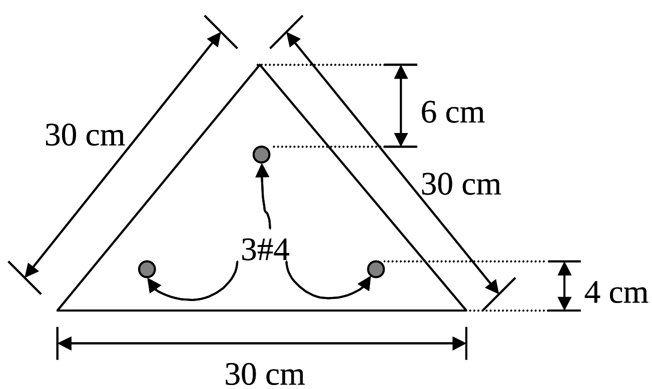
   ¿Cual es el momento de diseño $M_u=\phi M_n$, $\phi = 0.90$?

   Considere los siguientes casos de acero a tensión A_s:
   (a) A_s=3#10 en una capa.
   (b) A_s=4#9 en dos capas.
   (c) A_s=6#10 en dos capas.

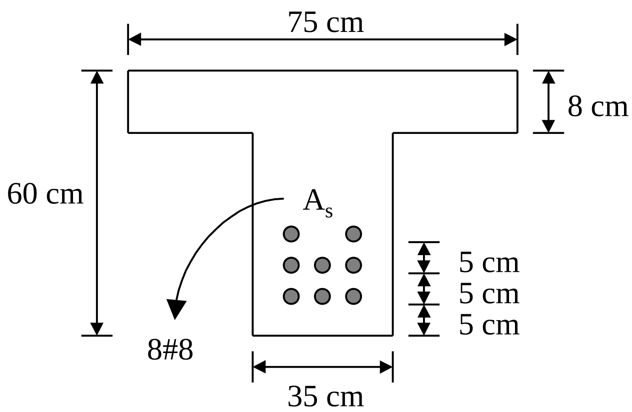
   Revisar si A_s' fluye.

   Nota: Considere como espacio libre entre capas de varillas el equivalente a un diámetro de las varillas a usar.

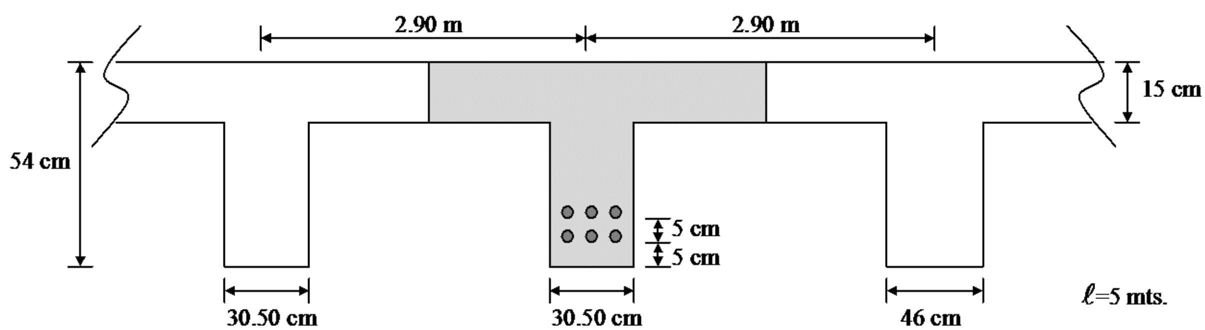
2. Determinar M_n para la sección que se muestra, f´c=200 kf/cm^2 y f_y=4200 kf/cm^2.



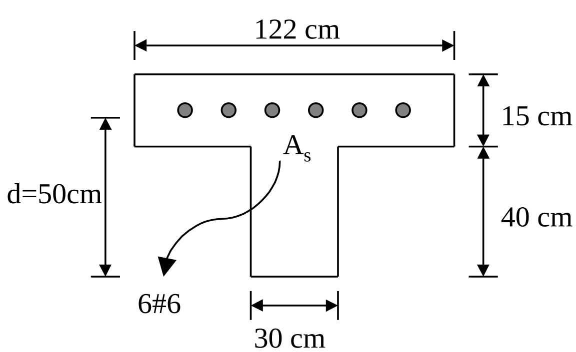
3. Calcular la resistencia de la siguiente sección, $f´c=200\ kf/cm^2$ y $f_y=4200\ kf/cm^2$.



4. Determinar M_n para el sistema **T** formado, asumir: $f´c=200\ kg/cm^2$, $f_y=4200\ kg/cm^2$ y $A_s=6\#8$ en dos capas.



5. Calculé el momento negativo que puede resistir la siguiente sección:



Asuma:
$f´c=250\ kg/cm^2$.
$fy=2800\ kg/cm^2$.